236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

I Méthodes de calcul directes

1) Calculs de primitives

Théorème 1. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet des primitives. Si F est une primitive de f, on a $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.*

Exemple 2. *Pour $\alpha > 1$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1+\alpha}$.*

Exemple 3. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$.*

Proposition 4. *Soit $f \in \mathbb{K}(X)$ non nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Écrivons $f = \frac{N}{D}$, avec $N, D \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et D unitaires. Écrivons $D = \prod_{i=1}^n D_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs irréductibles. Alors f s'écrit de manière unique sous la forme $f = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,j}}{D_i^j}$, avec $E \in \mathbb{K}[X]$, $A_{i,j} \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(A_{i,j}) < \deg(D_i)$.*

Application 5. *Pour calculer une intégrale d'une fraction rationnelle réelle, on la décompose en éléments simples. Il suffit alors de connaître les intégrales suivantes, pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $c^2 - 4d < 0$:*

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx \quad \text{et} \quad \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}\,dx$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{t(t^2+1)}\,dx &= \int_0^x \frac{1}{x}\,dx - \int_0^x \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int_0^x \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

2) Intégration par parties

Théorème 7 (Intégration par parties)**.** *Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors :*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Exemple 8 (Wallis)**.** *Si $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$, alors $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.*

Exemple 9. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour $x \in \mathbb{R}^\star$, et $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.*

3) Changement de variables

Théorème 10 (Changement de variable)**.** *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Alors, pour toute fonction borélienne $f : V \to \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J_\varphi(u)|\,du \quad \text{où} \quad J_\varphi(u) = \det(d\varphi_u)$$

De plus, toute fonction g mesurable et définie sur $\varphi(u)$ est intégrable si, et seulement si, $(g \circ \varphi)|J_\varphi|$ est intégrable sur U, et dans ce cas la formule précédente reste vraie pour g.

Application 11. *Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ borélienne, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^{+\star}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Exemple 12. $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

Corollaire 13. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varphi : [a,b] \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée ne s'annule pas. Alors :*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$$

Exemple 14. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ *et* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2$

4) Théorèmes de Fubini

Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ des espaces mesurés et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.

Théorème 15 (Fubini-Tonelli)**.** *Si f est $(\mu \otimes \nu)$-mesurable positive, alors $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ sont mesurable. De plus :*

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

Exemple 16. *Soit $D = \{x, y \geqslant 0, x+y \leqslant 1\}$. Alors $\int_D xy\,dx\,dy = \frac{1}{24}$.*

Théorème 17 (Fubini)**.** *Si f est $(\mu \otimes \nu)$-intégrable, alors la fonctions $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ sont définies presque partout et intégrables. De plus :*

$$\int_{X\times Y} f d\lambda = \int_X \left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y)$$

II Méthodes de calcul indirectes

1) Suites et séries de fonctions

Théorème 18 (Beppo Levi)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions mesurables positives, alors $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ est mesurable et $\int_X \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.*

Théorème 19 (Convergence dominée)**.** *Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $f : X \to \mathbb{C}$ telles que :*

(i) $f_n(x) \to f(x)$ μ p.p.

(ii) $\exists\, g \in L^1(X, \mathbb{R}^+, \mu), \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leqslant g(x)$ μ p.p.

Alors $f \in L^1(X, \mathbb{C}, \mu)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

Exemple 20. *L'hypothèse de domination est cruciale (cf $f_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$).*

Application 21. *Lorsque l'on peut écrire f comme série de fonctions, on peut souvent appliquer le théorème de convergence dominée.*

Exemple 22. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) Somme de Riemann

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée, $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$ et $\xi = (\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Définition 23. On appelle somme de Riemann de f la quantité :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

Théorème 24. *On suppose f continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout σ de pas inférieur à α et tout ξ, on a :*

$$\left\| \int_a^b f(x)\, dx - S(f, \sigma, \xi) \right\| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Exemple 25. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = \ln 2$

3) Intégrales à paramètres

Soit $f : \Lambda \times I \to \mathbb{K}$, où Λ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 26. *On suppose que :*

(i) Pour tout $t \in I$, $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ est continue sur Λ.

(ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I.

(iii) $\exists\, g \in L^1(I, \mathbb{R}^+), \forall \lambda \in \Lambda, |f(\lambda, t)| \leqslant g(t)$ p.p.

Alors $\lambda \mapsto \int_I f(\lambda, t) dt$ est continue sur Λ.

Théorème 27. *On suppose que :*

(i) Pour tout $t \in I$, $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ est dérivable sur Λ.

(ii) Pour tout $\lambda \in \Lambda$, $t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I.

(iii) $\exists\, g \in L^1(I, \mathbb{R}^+), \forall \lambda \in \Lambda, |f'(\lambda, t)| \leqslant g(t)$ p.p.

Alors $\lambda \mapsto \int_I f(\lambda, t) dt$ est dérivable sur Λ de dérivée $\lambda \mapsto \int_I f'(\lambda, t) dt$.

4) Analyse complexe

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ non vide.

Définition 28. Soit γ un lacet de $\mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. L'indice $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ de a par rapport à γ est l'entier défini par :

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z-a} dz$$

Théorème 29 (Cauchy)**.** *Soient Ω un ouvert convexe et $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$, alors pour tout lacet γ de Ω, on a $\int_\gamma f = 0$.*

Exemple 30. *Si $\gamma_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, alors $\widehat{\gamma_a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \gamma_{\frac{1}{4a}}$.*

Théorème 31 (Formule de Cauchy)**.** *Soient Ω est un ouvert convexe, $z \in \Omega$, γ un lacet de $\Omega \setminus \{z\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors on a :*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Théorème 32 (Théorème des résidus)**.** *Soient $S \subset \Omega$ fini, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus S)$ et γ un lacet dans Ω ne rencontrant pas S, alors :*

$$\int_\gamma f(z) dz = 2i\pi \sum_{c\in S} \mathrm{Ind}_\gamma(c)\, \mathrm{Res}(f, c)$$

Exemple 33. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

Exemple 34. *Soit $\alpha \in]-1, 1[$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}$.*

III Méthodes d'approximation numérique

1) Méthodes de quadrature

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche des formules pour approcher $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Fixons $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. On pose $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Définition 35. Une méthode de quadrature consiste, pour $0 \leqslant i < n$ à approcher $I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ par $A_i(f)$ défini par :

$$A_i(f) = h_i \sum_{j=0}^{n_i} \omega_{i,j} f(\zeta_{i,j}) \quad \text{où} \quad \zeta_{i,j} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n_i} \omega_{i,j} = 1$$

On note alors $E(f) = I(f) - \sum_{i=0}^{n-1} A_i(f)$ l'erreur de la méthode.

Définition 36. Une méthode de quadrature est d'ordre N si $E(f) = 0$ pour tout $f \in \mathbb{R}_N[X]$ et s'il existe $f \in \mathbb{R}_{N+1}[X]$ telle qu'elle soit inexacte.

Application 37. *En fixant $(\zeta_j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ associé à une subdivision de $[x_i, x_{i+1}]$, on peut prendre pour fonction de poids $\omega_j = \frac{1}{h_i} \int_{[x_i, x_{i+1}]} \ell_j$, où $\ell_j = \prod_{k \neq j} \frac{X - \zeta_k}{\zeta_j - \zeta_k}$. Ce sont les méthodes par interpolation de Lagrange.*

(i) Méthode des rectangles : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $z_i = x_i$ ou x_{i+1}. Méthode d'ordre 0.

(ii) Méthode des points milieux : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i f(z_i)$ où $z_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leqslant \frac{1}{3} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.

(iii) Méthode des trapèzes : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$. Méthode d'ordre 1 et $E(f) \leqslant \frac{2}{3} \|f''\|_\infty$ si f est $\mathcal{C}^2$.

(iv) Méthode de Simpson : $I(f) \sim \sum_{i=0}^{n-1} h_i \frac{f(x_{i+1}) + 4f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) + f(x_i)}{6}$. Méthode d'ordre 3 et $E(f) = \mathcal{O}\left(\left\|f^{(4)}\right\|_\infty\right)$ si f est $\mathcal{C}^4$.

2) Méthode de Monte-Carlo

Théorème 38 (Loi forte des grands nombres)**.** *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées de même loi qu'une variable aléatoire réelle X. Alors :*

$$\mathbb{E}[|X|] < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}[X]$$

Application 39 (Monte-Carlo)**.** *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)dt \ p.s.$$

Théorème 40 (Théorème central limite)**.** *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de carré intégrable. Alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Application 41. *On suppose que les X_n sont indépendants, identiquement distribués et de loi $\mathcal{B}(p)$ pour $p \in [0,1]$ inconnu. Le théorème central limite donne un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour p en fonction de la moyenne empirique $\widehat{p_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_i$. Il s'agit de :*

$$IC_\alpha = \left[\widehat{p_n} \pm \frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{n}}\right]$$

où q_t est le quantile d'ordre t de $\mathcal{N}(0,1)$.

Application 42. *Dans la méthode de Monte-Carlo, on obtient un intervalle de confiance de probabilité asymptotique $1 - \alpha$ de longueur proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Développements

- Transformée de Fourier d'une gaussienne (30) [El 08]
- Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus (34) [Tau06]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[BP12] M. Briane et G. Pagès. *Théorie de l'intégration.* Vuilbert

[Dem06] J.-P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* EDP Sciences

[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini

[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses

[Tau06] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3.* Dunod